Correction de l'exercice p. 3

- 1) $\mathcal{B}_1$ est constituée de deux vecteurs donc ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ qui lui est de dimension 3

  2) Soit $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec $\vec{u}(1,1,0)$, $\vec{v}(2,1,2)$ et $\vec{w}(1,0,a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

  Puisque cette famille a trois vecteurs, s'ils forment une famille libre alors $\mathcal{B}_2$ sera une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & L_1 \\ \alpha + \beta = 0 & L_2 \\ 2\beta + a\gamma = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \beta + \gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2\beta + a\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff (S) \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & L_1 \leftarrow L_1 \\ \beta + \gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 \\ (a-2)\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L \end{cases}$$

* Si $a = 2$, $(S) \iff \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$

  Donc $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \not\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

  (par exemple $(1,-1,1)$ convient.

  Et donc $\mathcal{B}_2$ n'est pas une famille libre.

  Par conséquent $\mathcal{B}_2$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$

* Si $a \neq 2$, $(S) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ donc $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$

  $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

  [illegible]

- * Soit $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,/\, b - 2c + d = 0\}$

  $\forall \vec{w} = (a,b,c,d)$ de F montrons qu'il s'exprime en fonction de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

  Or $\forall (a,b,c,d) \in F$, $\begin{cases} a = a \\ b = 2 \times c - 1 \times d \\ c = c \\ d = d \end{cases}$

  donc si l'on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,2,1,0)$ et $\vec{u}_3 = (0,-1,0,1)$ on a :

  $$\vec{w} = a\vec{u}_1 + c\vec{u}_2 + d\vec{u}_3.$$

  Ainsi $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une famille génératrice de F.

  Reste à montrer que c'est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

  Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3 = \vec{0}$

  $$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

  donc $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ (et donc de F), c'est donc une base de F.

* Soit $G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,/\, a = d \text{ et } b = 2c\}$

  $\forall (a,b,c,d) \in G$, $\begin{cases} a = a \\ b = 2c \\ c = c \\ d = a \end{cases}$

  Donc si l'on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

  $\forall \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ de G on a : $\vec{v} = a\vec{v}_1 + c\vec{v}_2$

  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est donc une famille génératrice de G.

  Montrons qu'elle est libre :

  Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{0} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$

  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre donc est une base de G

* $F \cap G = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases} b - 2c + d = 0 \\ a = d \\ b = 2c \end{cases}\right\}$

  $\forall \vec{w}(a,b,c,d) \in F \cap G$, $\begin{cases} a = d \\ b = 2c \\ d = -b + 2c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 2c \\ c = c \\ d = 0 \end{cases}$

  Donc $\vec{w}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendre $F \cap G$ et comme il est non nul, $(\vec{w}_1)$ est une base de $F \cap G$

* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4$

  Or $F + G \subset \mathbb{R}^4$. Donc, étant de même dimension que $\mathbb{R}^4$,

  $F + G = \mathbb{R}^4$

Remarque : $F + G = \{f + g \in \mathbb{R}^4 \,/\, f \in F \text{ et } g \in G\}$